TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Medida generada por una función de distribución conjunta

Introducción

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y n variables aleatorias reales $X_1, \ldots, X_n$, se define su función de distribución conjunta $F_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\left[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\right]$$

Una familia de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ puede verse como la función de Ω en $\mathbb{R}^n$ que asigna a cada $\omega \in \Omega$ el vector $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$; de esta forma, podemos decir que las variables aleatorias forman un **vector aleatorio** $(X_1, \ldots, X_n)$.

Una función de distribución conjunta tiene propiedades similares a las de la función de distribución de una sola variable aleatoria.

Teorema 1.

Proposición 1. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias y $F_{X_1,\ldots,X_n}$ su función de distribución conjunta, entonces, para cada $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, se tiene:*

1. *La función $x \mapsto F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, definida sobre $\mathbb{R}$, es no decreciente y continua por la derecha.*
2. $\lim_{x\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$
   $= F_{X_1,,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$
3. $\lim_{x\to-\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$

Demostración

1. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} y_m = x$, entonces:

$\lim_{m\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_m, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$= \lim_{m\to\infty} P\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]$

$= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]\right)$

$= P\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq x, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]$

$= F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

2. Sea $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente tal que $\text{lím}_{n\to\infty} y_m = \infty$, entonces:

$\text{lím}_{m\to\infty} P\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]$

$= P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]\right)$

$= P\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \in \mathbb{R}, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]$

$= F_{X_1,,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

3. Sea $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente tal que $\text{lím}_{n\to\infty} y_m = -\infty$, entonces:

$\text{lím}_{m\to\infty} P\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]$

$= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{j-1} \leq x_{j-1}, X_j \leq y_m, X_{j+1} \leq x_{j+1}, \ldots, X_n \leq x_n\right]\right)$

$= P[\emptyset] = 0$

$\blacksquare$

Las condiciones de la proposición anterior no son suficientes para que una función F sea una función de distribución conjunta. En efecto, consideremos, por ejemplo, la siguiente función:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ x + y & \text{si } x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0 \\ 1 & \text{si } x + y \geq 1, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Esta función tiene las propiedades siguientes:

1. Para cada $y \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto F(x,y)$ es no decreciente y continua por la derecha y $\text{lím}_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$.
2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto F(x,y)$ es no decreciente y continua por la derecha y $\text{lím}_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$.
3. Las funciones $G : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ y $H : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, definidas por $G(y) = \text{lím}_{x\to\infty} F(x,y)$ y $H(x) = \text{lím}_{y\to\infty} F(x,y)$, respectivamente, son funciones de distribución en una variable.

Sin embargo, F no es una función de distribución conjunta de alguna pareja de variables aleatorias X, Y. En efecto, si lo fuera, se tendría:

$P[X \leq x] = \text{lím}_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$P[Y \leq y] = \text{lím}_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$

Así que, $P[X = 0] = P[Y = 0] = 1$.

Por lo tanto, se tendría $P[X = 0, Y = 0] = 1$.

Pero, $P[X = 0, Y = 0] \leq F(0,0) = 0$, lo cual es una contradicción.

Lo que le hace falta a esta función F para que sea una función de distribución conjunta es que, si la utilizaramos para calcular la probabilidad de que la pareja X, Y tome valores dentro de un rectángulo, esa probabilidad tendría que ser no negativa cualquiera que sea el rectángulo que se tome.

Véamos entonces cómo podemos determinar si una función en n variables es una función de distribución conjunta.

Definición 1. *Una celda en* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto de la forma* $I_1 \times \cdots \times I_n$*, donde* $I_1, \cdots, I_n$ *son intervalos en* $\mathbb{R}$*.*

Definición 2. *Si* $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ *es una celda en* $\mathbb{R}^n$ *y* $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ *son los extremos de* $I_1, \cdots, I_n$*, respectivamente, los intervalos* I_k *serán llamados los lados de la celda y los puntos del conjunto* $V_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \{a_k, b_k\} \text{ para toda } k\}$ *serán llamados sus vértices.*

Definición 3. *Una celda del tipo* $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ *será denotado por* $R_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}$ *y* $S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}$ *denotará al conjunto:*

$\{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = a_i \text{ para } k \text{ índices } i \text{ y } x_i = b_i \text{ para el resto de índices}\}$.

Obviamente, $V_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)} = \bigcup_{k=0}^{n} S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}$.

Teorema 2. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias y $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ una celda de $\mathbb{R}^n$.*

Entonces, para cualquier $A \in \Im$, se tiene:

$P([a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n] \cap A)$

$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} P([X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n] \cap A)$

Demostración

Para $n = 1$ se tiene:

$P([a_1 < X_1 \leq b_1] \cap A) = P([X_1 \leq b_1] \cap A) - P([X_1 \leq a_1] \cap A)$.

Así que la relación se cumple en este caso.

Supongamos que el resultado es válido para $n = k$. Entonces, dada cualquier celda $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_{k+1}, b_{k+1}]$ y cualquier evento A se tiene:

$P([a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_{n+1} < X_{n+1} \leq b_{n+1}] \cap A)$

$= P([a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n, X_{n+1} \leq b_{n+1}] \cap A)$

$-P([a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n, X_{n+1} \leq a_{n+1}] \cap A)$

$= (P[a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n] \cap A \cap [X_{n+1} \leq b_{n+1}])$

$- (P[a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n] \cap A \cap [X_{n+1} \leq a_{n+1}])$

$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} P([X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n] \cap A \cap [X_{n+1} \leq b_{n+1}])$

$- \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} P([X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n] \cap A \cap [X_{n+1} \leq a_{n+1}])$

$= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1})}\right\}} P([X_1 \leq x_1, \cdots, X_{n+1} \leq x_{n+1}] \cap A)$

Así que, por el principio de inducción matemática, el resultado es válido para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

■

Corolario 1. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias y $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ una celda de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

$P([a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_n < X_n \leq b_n])$

$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

Corolario 2. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias y $F_{X_1,\ldots,X_n}$ su función de distribución conjunta, entonces:*

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) \geq 0$

para cualquier celda $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$.

Para la continuidad por la derecha, se tiene el siguiente resultado, más general que el enunciado en la proposición 1:

Teorema 3. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias y $F_{X_1,\ldots,X_n}$ su función de distribución conjunta, entonces:*

$\lim_{m\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1 + \delta_1^{(m)}, \cdots, x_n + \delta_n^{(m)}\right) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)$

para cualquier vector $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier sucesión $\left(\left(\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ que converja al vector $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}$ sean números reales positivos.

Demostración

Sea $\left(\left(\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge al vector $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}$ son números reales positivos. Entonces, para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$$\lim_{m\to\infty} \delta_k^{(m)} = 0$$

Así que, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe una subsucesión $\left(\delta_k^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, de la sucesión $\left(\delta_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, la cual es decreciente.

Por lo tanto:

$\lim_{m\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1 + \delta_1^{(m)}, \cdots, x_n + \delta_n^{(m)}\right)$

$= \lim_{j\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1 + \delta_1^{(m_j)}, \cdots, x_n + \delta_n^{(m_j)}\right)$

$= \lim_{j\to\infty} P\left(\left[X_1 \leq x_1 + \delta_1^{(m_j)}, \ldots, X_n \leq x_n + \delta_n^{(m_j)}\right]\right)$

$= P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\left[X_1 \leq x_1 + \delta_1^{(m_j)}, \ldots, X_n \leq x_n + \delta_n^{(m_j)}\right]\right)$

$= P\left([X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n]\right)$

$= F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)$

Definición 4. *Para $n \in \{2, 3, \ldots\}$, diremos que una función $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una función de distribución en n variables si satisface las siguientes propiedades:*

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right) \geq 0$
   para cualquier celda $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$.
2. $\lim_{m\to\infty} F\left(x_1 + \delta_1^{(m)}, \cdots, x_n + \delta_n^{(m)}\right) = F\left(x_1, \cdots, x_n\right)$
   para cualquier vector $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier sucesión $\left(\left(\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ que converja al vector $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\delta_1^{(m)}, \cdots, \delta_n^{(m)}$ sean números reales positivos.
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$
   para cualquier $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
4. *Para cada $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, el límite*
   $\lim_{x\to\infty} F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$
   existe y la función $G : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:
   $G(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \lim_{x\to\infty} F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$
   es una función de distribución en $n - 1$ variables.
5. $\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(\infty,\ldots,\infty)} F\left(x_1, \cdots, x_n\right) = 1$

Construcción de la medida generada por una función de distribución en n variables

El proceso para construir la medida generada por una función de distribución en n variables es similar al que seguimos para construir la medida generada por una función de distribución de una variabler aleatoria.

Definición 5. *Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $a < b$, definimos $(a, b|$ de la siguiente manera:*

$$(a, b| = \begin{cases} (a, b] & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ (a, b) & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Sea $\mathcal{C}$ la familia de celdas del tipo $(a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n|$, agregando al vacío como parte de la familia.

Definición 6. *Sea $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función de distribución en n variables.*

Si $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, definimos:

$F(x_1, \ldots, x_{j-1}, \infty, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \lim_{x\to\infty} F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$F(x_1, \ldots, x_{j-1}, -\infty, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$

Con estas convenciones, se tiene que:

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1,\cdots,x_n\right) \geq 0$

para cualquier celda $(a_1,b_1| \times \cdots \times (a_n,b_n| \in \mathcal{C}$.

Los pasos a seguir para construir la medida μ_F generada por una función de distribución en n variables F, son los siguientes:

1. Se define la medida μ_F para los elementos de $\mathcal{C}$.

2. Se demuestra el resultado central que permite extender μ_F a una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, el cual consiste en los siguiente:

Sea $R = (a_1,b_1| \times \cdots \times (a_n,b_n| \in \mathcal{C}$ y $R^{(i)} = \left(a_1^{(i)}, b_1^{(i)}\right| \times \cdots \times \left(a_n^{(i)}, b_n^{(i)}\right|$ una colección infinita de elementos de $\mathcal{C}$ tales que $R \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$, entonces:

$$\mu_F\left(R\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F\left(R^{(i)}\right)$$

3. Se extiende μ_F a una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que forman un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

4. Utilizando el resultado central que permite extender μ_F, se demuestra que μ_F tiene la siguiente propiedad:

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F\left(A_n\right)$$

5. Como corolario, se prueba que, dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(A_n)$$

6. Se define la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

7. Se caracteriza a los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los cuales se puede definir su medida, dándoles el nombre de conjuntos medibles y asignándoles como medida μ_F su medida exterior.

8. Se demuestran algunas propiedades de la medida exterior previamente definida.

9. Se prueba la $\sigma-$subaditividad de la medida exterior.

10. Se muestra que cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es medible.

11. Se demuestra que la familia $\Im_F$ de los conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

12. Se prueba que μ_F, definida sobre $\Im_F$, es finitamente aditiva.

13. Se demuestra que la familia $\Im_F$ de los conjuntos medibles forma una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

14. Se prueba que μ_F, definida sobre $\Im_F$, es $\sigma-$aditiva, con lo cual habremos demostrado que es una medida definida sobre una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

PASO 1. Definamos $\mu_F(\emptyset) = 0$ y, si $R = (a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n| \in \mathcal{C}$, definamos:

$$\mu_F(R) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F(x_1, \cdots, x_n)$$

PASO 2. Demostración del resultado central que permite realizar la extensión de μ_F.

Lema 1. *Sea $R = (a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n| \in \mathcal{C}$. Para cada intervalo $(a_i, b_i|$ consideremos una partición:*

$$P_i = \left\{ a_i = c_0^{(i)} < c_1^{(i)} < \cdots < c_{m_i}^{(i)} = b_i \right\}$$

Entonces:

$$\mu_F(R) = \sum_{j_i \in \{1,\ldots,m_i\}} \mu_F\left(R_{\left(c^{(1)}_{j_1-1}, c^{(1)}_{j_1}, \ldots, c^{(n)}_{j_n-1}, c^{(n)}_{j_n}\right)} \right)$$

Demostración

Las particiones P_i parten la celda R en $m_1 \cdots m_n$ celdas de la forma $\left(c^{(1)}_{j_1-1}, c^{(1)}_{j_1}\right| \times \cdots \times \left(c^{(n)}_{j_n-1}, c^{(n)}_{j_n}\right|$ y se tiene:

$$(a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n| = \bigcup_{j_i \in \{1,\ldots,m_i\}} \left(c^{(1)}_{j_1-1}, c^{(1)}_{j_1}\right| \times \cdots \times \left(c^{(n)}_{j_n-1}, c^{(n)}_{j_n}\right|$$

Denotemos por $V_{\left(c^{(1)}_{j_1-1}, c^{(1)}_{j_1}, \ldots, c^{(n)}_{j_n-1}, c^{(n)}_{j_n}\right)}$ al conjunto de vértices de la celda $\left(c^{(1)}_{j_1-1}, c^{(1)}_{j_1}\right| \times \cdots \times \left(c^{(n)}_{j_n-1}, c^{(n)}_{j_n}\right|$, por S a la sumatoria:

$$\sum_{j_i\in\{1,\ldots,m_i\}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{\left(c^{(1)}_{j_1-1},c^{(1)}_{j_1},\ldots,c^{(n)}_{j_n-1},c^{(n)}_{j_n}\right)}\right\}}F\left(x_1,\cdots,x_n\right)\right]$$

y por S' a la sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}}F\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\mu_F\left(R\right)$$

Sea $(x_1,\cdots,x_n)\in V_{\left(c^{(1)}_{j_1-1},c^{(1)}_{j_1},\ldots,c^{(n)}_{j_n-1},c^{(n)}_{j_n}\right)}$, entonces cada coordenada x_i es un elemento de la partición P_i.

Si $x_i=c^{(i)}_j\in P_i-\{a_i,b_i\}$, entonces $(x_1,\cdots,x_n)$ es vértice de una celda cuyo i-ésimo lado es $\left(c^{(i)}_{j-1},c^{(i)}_j\right|$ y también es vértice de una celda cuyo i-ésimo lado es $\left(c^{(i)}_j,c^{(i)}_{j+1}\right|$, de manera que $F(x_1,\cdots,x_n)$ aparecerá en la sumatoria S dos veces, una con signo positivo y otra con signo negativo, cancelándose.

Por lo tanto, los únicos términos de la sumatoria S, que no se anulan, son aquellos para los cuales $x_i\in\{a_i,b_i\}$ para toda $i\in\{1,\ldots,n\}$, es decir, $(x_1,\cdots,x_n)\in S_k$ para alguna $k\in\{0,\ldots,n\}$.

Cuando $x_i=a_i$, entonces el punto $(x_1,\cdots,x_n)$ es vértice de una celda cuyo i-ésimo lado es $\left(a_i,c^{(i)}_1\right|$, mientras que cuando $x_i=b_i$, entonces el punto $(x_1,\cdots,x_n)$ es vértice de una celda cuyo i-ésimo lado es $\left(c^{(i)}_{m_i-1},b_i\right|$. Por lo tanto, si $(x_1,\cdots,x_n)\in S_k$, entonces $(x_1,\cdots,x_n)\in S^{(k)}_{\left(c^{(1)}_{j_1-1},c^{(1)}_{j_1},\ldots,c^{(n)}_{j_n-1},c^{(n)}_{j_n}\right)}$ para alguna colección $(j_1,\ldots,j_n)$, así que $F(x_1,\cdots,x_n)$ aparece en la sumatoria S y en la sumatoria S' con el mismo signo. Es decir, $S=S'$.

■

Proposición 2. *Sea* $R=(a_1,b_1|\times\cdots\times(a_n,b_n|\in\mathcal{C}$ *y* $R^{(j)}=\left(a^{(j)}_1,b^{(j)}_1\right|\times\cdots\times\left(a^{(j)}_n,b^{(j)}_n\right|\in\mathcal{C}$ *una colección finita de celdas, ajenas por parejas, tales que* $R=\bigcup_{j=1}^{m}R^{(j)}$, *entonces:*

$$\mu_F\left(R\right)=\sum_{j=1}^{m}\mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

Demostración

Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, los puntos $a^{(1)}_i,b^{(1)}_i,\ldots,a^{(m)}_i,b^{(m)}_i$ constituyen una partición del intervalo $(a_i,b_i|$.

Este conjunto de particiones parte cada celda $R^{(j)}$ en subceldas $R^{(j)}_1,\ldots,R^{(j)}_{i_j}$. Por el lema 1, se tiene:

$$\mu_F\left(R^{(j)}\right)=\sum_{k=1}^{i_j}\mu_F\left(R_k^{(j)}\right)$$

Además, $R=\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{i_j}R_k^{(j)}$.

Así que, nuevamente, por el lema 1:

$$\mu_F\left(R\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{i_j}\mu_F\left(R_k^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

$\blacksquare$

Corolario 3. *Sea* $R=(a_1,b_1|\times\cdots\times(a_n,b_n|\in\mathcal{C}$ *y* $R^{(j)}=\left(a_1^{(j)},b_1^{(j)}\right|\times\cdots\times\left(a_n^{(j)},b_n^{(j)}\right|\in\mathcal{C}$ *una colección finita de celdas tales que* $R\subset\bigcup_{j=1}^{m}R^{(j)}$*, entonces:*

$$\mu_F\left(R\right)\leq\sum_{j=1}^{m}\mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

Demostración

Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, los puntos $a_i,b_i,a_i^{(1)},b_i^{(1)},\ldots,a_i^{(m)},b_i^{(m)}$ constituyen una partición de un intervalo $(c_i,d_i|$.

Este conjunto de particiones parte cada celda $R^{(j)}$ en subceldas $R_1^{(j)},\ldots,R_{i_j}^{(j)}$. Por el lema 1, se tiene:

$$\mu_F\left(R^{(j)}\right)=\sum_{k=1}^{i_j}\mu_F\left(R_k^{(j)}\right)$$

El conjunto de particiones definido antes también parte la celda R en subceldas $R_1,\ldots,R_i$, así que, nuevamente por el lema 1, se tiene:

$$\mu_F\left(R\right)=\sum_{k=1}^{i}\ \mu_F\left(R_k\right)$$

Por otra parte, como $R\subset\bigcup_{j=1}^{m}R^{(j)}$, cada celda R_k coincide con una celda $R_{k'}^{(j)}$ para alguna j y alguna k', por lo tanto:

$$\mu_F\left(R\right)=\sum_{k=1}^{i}\ \mu_F\left(R_k\right)\leq\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{i_j}\mu_F\left(R_k^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

$\blacksquare$

Teorema 4. *Sea* $R=(a_1,b_1|\times\cdots\times(a_n,b_n|\in\mathcal{C}$ *y* $R^{(i)}=\left(a_1^{(i)},b_1^{(i)}\right|\times\cdots\times\left(a_n^{(i)},b_n^{(i)}\right|\in\mathcal{C}$ *una colección infinita de celdas tales que* $R\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}R^{(i)}$*, entonces:*

$$\mu_F\left(R\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu_F\left(R^{(i)}\right)$$

Demostración

Para cada $i\in\mathbb{N}$ y cada $\delta_i>0$, definamos, para $k\in\{1,\ldots,n\}$:

$$d_k^{\delta_i} = \begin{cases} b_k^{(i)} + \delta_i & \text{si } b_k^{(i)} \in \mathbb{R} \\ b_k^{(i)} & \text{si } b_k^{(i)} = \infty \end{cases}$$

Consideremos la celda:

$$R_{\delta_i} = \left(a_1^{(i)}, d_1^{\delta_i}\right| \times \cdots \times \left(a_n^{(i)}, d_n^{\delta_i}\right|$$

la cual contiene a $R^{(i)}$. Se tiene entonces:

$\lim_{\delta_i \to 0} \mu_F\left(R_{\delta_i}\right)$

$= \lim_{\delta_i \to 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{\left(a_1, d_1^{\delta_i}, \ldots, a_n, d_n^{\delta_i}\right)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \mu_F\left(R^{(i)}\right)$

Dada $\varepsilon > 0$, existe entonces $\delta_i > 0$ tal que:

$$\mu_F\left(R_{\delta_i}\right) - \mu_F\left(R^{(i)}\right) < \tfrac{\varepsilon}{2^i}$$

Por otra parte, si $\delta > 0$, definamos, para $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$c_{k,\delta} = \begin{cases} a_k + \delta & \text{si } a_k \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\delta} & \text{si } a_k = -\infty \end{cases}$$

$$d_{k,\delta} = \begin{cases} b_k & \text{si } b_k \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } b_k = \infty \end{cases}$$

Consideremos la celda:

$$R_\delta = (c_{1,\delta}, d_{1,\delta}| \times \cdots \times (c_{n,\delta}, d_{n,\delta}|$$

Entonces:

$\lim_{\delta \to 0} \mu_F\left(R_\delta\right)$

$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{\left(c_{1,\delta}, d_{1,\delta}, \ldots, c_{n,\delta}, d_{n,\delta}\right)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \mu_F\left(R\right).$

Tomemos $\delta > 0$ arbitraria, entonces:

$$R_\delta \subset [c_{1,\delta}, d_{1,\delta}] \times \cdots \times [c_{n,\delta}, d_{n,\delta}] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_1^{(i)}, d_1^{(i)}\right) \times \cdots \times \left(a_n^{(i)}, d_n^{(i)}\right)$$

Así que, por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $\left(a_1^{(i_1)}, d_1^{(i_1)}\right) \times \cdots \times \left(a_n^{(i_1)}, d_n^{(i_1)}\right), \ldots, \left(a_1^{(i_m)}, d_1^{(i_m)}\right) \times \cdots \times \left(a_n^{(i_m)}, d_n^{(i_m)}\right)$, tal que:

$R_\delta \subset [c_{1,\delta}, d_{1,\delta}] \times \cdots \times [c_{n,\delta}, d_{n,\delta}] \subset \bigcup_{j=1}^m \left(a_1^{(i_j)}, d_1^{(i_j)}\right) \times \cdots \times \left(a_n^{(i_j)}, d_n^{(i_j)}\right)$

$\subset \bigcup_{j=1}^m \left(a_1^{(i_j)}, d_1^{(i_j)}\right| \times \cdots \times \left(a_n^{(i_j)}, d_n^{(i_j)}\right| = \bigcup_{j=1}^m R_{\delta_{i_j}}$

Así que:

$\mu_F\left(R_\delta\right) \leq \sum_{j=1}^m \mu_F\left(R_{\delta_{i_j}}\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_F\left(R_{\delta_i}\right)$

$\leq \sum_{i=1}^\infty \left[\mu_F\left(R^{(i)}\right) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right] = \sum_{i=1}^\infty \mu_F\left(R^{(i)}\right) + \varepsilon$

Y, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria:

$$\mu_F\left(R_\delta\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_F\left(R^{(i)}\right)$$

Finalmente, tomando límites cuando $\delta \to 0$, se obtiene:

$$\mu_F\left(R\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_F\left(R^{(i)}\right)$$

■

PASO 3.

Sea $\mathcal{A}$ la familia de conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^m R_j$, donde $m \in \mathbb{N}$ y $R_1, \ldots, R_m$ son celdas en $\mathcal{C}$, ajenas por parejas. Para cada $A = \bigcup_{j=1}^m R_j \in \mathcal{A}$, definamos:

$$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^m \mu_F(R_j)$$

$\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Mostremos que μ_F está bien definida; es decir, que si A se puede expresar de diferentes maneras como una unión finita de intervalos en $\mathcal{C}$, ajenos por parejas, se obtiene el mismo valor para $\mu_F(A)$.

Proposición 3. *Sean $R_1, \ldots, R_k$ y $R^{(1)}, \ldots, R^{(m)}$ dos colecciones finitas de celdas en $\mathcal{C}$, tales que $R_1, \ldots, R_k$ son ajenos por parejas, $R^{(1)}, \ldots, R^{(m)}$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{i=1}^{k} R_i = \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$.*

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_F(R_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

Demostración

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, definamos $R_i^{(j)} = R_i \cap R^{(j)}$. Entonces, como $\bigcup_{i=1}^{k} R_i = \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$, se tiene $R_i = \bigcup_{j=1}^{m} R_i^{(j)}$ y $R^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k} R_i^{(j)}$, así que:

$$\mu_F(R_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R_i^{(j)}\right)$$

$$\mu_F\left(R^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_F\left(R_i^{(j)}\right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_F(R_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R_i^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} \mu_F\left(R_i^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R^{(j)}\right)$$

■

Obviamente la función $\mu_F : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ es no negativa y finitamente aditiva.

PASO 4.

Teorema 1. *Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

Demostración

Por un lado, como $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A es una unión infinita numerable de celdas $R_k \in \mathcal{C}$.

Por otro lado, como $A \in \mathcal{A}$, A es una unión finita de celdas $(a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n| \in \mathcal{C}$.

Sea $A = \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$, donde $R^{(j)} = \left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right| \times \cdots \times \left(a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\right|$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $k \in \mathbb{N}$, definamos $R_k^{(j)} = R_k \cap R^{(j)}$. Entonces, como $\bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, se tiene $R_k = \bigcup_{j=1}^{m} R_k^{(j)}$ y $R^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^{(j)}$, así que:

$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F\left(R_k^{(j)}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(R_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(R_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$

Además, como μ_F es finitamente aditiva y $A \supset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_F(A_i)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

Por lo tanto:

$$\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

■

PASO 5.

Corolario 4. *Si $A_1, A_2, \ldots$ es cualquier colección infinita de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

Demostración

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $B_m = A_m - \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j$, entonces los conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, así que:

$$\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu_F\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_F(B_m) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

■

PASO 6.

Definición 7. *Diremos que una colección finita o infinita numerable $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ es una cubierta de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si $A \subset \bigcup_j A_j$.*

Definición 8. *Se define la medida exterior, $\mu_e(A)$, de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, mediante la relación:*

$$\mu_e(A) = \inf\left\{\sum_j \mu_F(A_j) : A_1, A_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$$

PASO 7.

Definición 9. *Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible si $\mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$ para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$. Además, en este caso, se define $\mu_F(E)$, como la medida exterior de E.*

Denotaremos por $\Im_F$ a la familia de conjuntos medibles.

PASO 8.

A continuación veremos algunas de las propiedades de la medida exterior que hemos definido.

Se puede ver inmediatamente que Si A y B son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $A \subset B$ entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.

Proposición 4. *Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_e(A) = \mu_F(A)$.*

Demostración

Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces $A_j \cap A \in \mathcal{A}$ para cualquier elemento A_j de la cubierta y $\bigcup_j (A_j \cap A) = A \in \mathcal{A}$; así que, por el corolario 4:

$$\mu_F(A) = \mu_F(\textstyle\bigcup_j (A_j \cap A)) \leq \sum_j \mu_F(A_j \cap A) \leq \sum_j \mu_X(A_j)$$

Por lo tanto, como esto ocurre para cualquier cubierta de A, $\mu_F(A) \leq \mu_e(A)$.

Por otra parte, como A es una cubierta de él mismo, se tiene $\mu_e(A) \leq \mu_F(A)$.

Así que, $\mu_e(A) = \mu_F(A)$.

∎

Corolario 5. $\mu_e(A) \leq 1$ *para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración

Como $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$, se tiene:

$$\mu_e(\mathbb{R}^n) = \mu_F(\mathbb{R}^n) = 1$$

Así que, para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(\mathbb{R}^n) = 1$$

∎

PASO 9.

Proposición 5. *Si* $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$*, entonces:*

$$\mu_e\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_e(A_m)$$

Demostración

Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_m, sea $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots$ una cubierta de A_m tal que:

$$\sum_j \mu_F(A_m^{(j)}) < \mu_e(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}$$

La familia de conjuntos $A_m^{(j)}$ forman una cubierta de $\bigcup_m A_m$, así que:

$$\mu_e\left(\bigcup_m A_m\right) \leq \sum_m \sum_j \mu_F(A_m^{(j)}) \leq \sum_m \left[\mu_e(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right] \leq \sum_m \mu_e(A_m) + \varepsilon$$

Es decir, $\mu_e\left(\bigcup_m A_m\right) \leq \sum_m \mu_e(A_m) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$\mu_e\left(\bigcup_m A_m\right) \leq \sum_m \mu_e(A_m)$$

■

A la propiedad de la medida exterior, demostrada en la proposición anterior, se le llama $\sigma-$**subaditividad**.

Obsérvese que, por esta propiedad, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad.

PASO 10.

Proposición 6. *Todo elemento de* $\mathcal{A}$ *es medible.*

Demostración

Sean $E \in \mathcal{A}$, A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces, para cada A_m, los conjuntos $A_m \cap E$ y $A_m \cap E^c$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y se tiene:

$\mu_e(A \cap E) \leq \mu_e\left(\left(\bigcup_m A_m\right) \cap E\right) = \mu_e\left(\bigcup_m (A_m \cap E)\right)$

$\leq \sum_m \mu_e(A_m \cap E) = \sum_m \mu_F(A_m \cap E)$

$\mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e\left(\left(\bigcup_m A_m\right) \cap E^c\right) = \mu_e\left(\bigcup_m (A_m \cap E^c)\right)$

$\leq \sum_m \mu_e(A_m \cap E^c) = \sum_m \mu_F(A_m \cap E^c)$

Así que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \sum_m \mu_F(A_n \cap E) + \sum_m \mu_F(A_m \cap E^c) = \sum_m \mu_F(A_m)$$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e(A)$$

■

PASO 11.

Proposición 7. *La familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración

Que el conjunto $\mathbb{R}^n$ es medible, así como que el complemento de un conjunto medible es medible, son resultados obvios.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se tiene entonces:

$\mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)$

$= \mu_e\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c) = \mu_e(A)$

Así que, $E_1 \cup E_2$ es medible.

■

PASO 12.

Proposición 8. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu_F(E)$, es finitamente aditiva.*

Demostración

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles ajenos, entonces, como $E_1 \cup E_2$ es medible, se tiene:

$\mu\left(E_1 \cup E_2\right)) = \mu\left(\left(E_1 \cup E_2\right)\right) \cap E_1\right) + \mu\left(\left(E_1 \cup E_2\right) \cap E_1^c\right)$

$= \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right)$

■

PASO 13.

Proposición 9. *La familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas y A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Demostremos que $\mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^m E_j\right)\right) = \sum_{j=1}^m \mu_e(A \cap E_j)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Para $m = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $m = k$, entonces, como E_{k+1} es medible, se tiene:

$\mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j\right)\right) = \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j\right) \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j\right) \cap E_{k+1}^c\right)$

$= \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)\right) = \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^k \mu_e(A \cap E_j)$

$= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_e(A \cap E_j)$

Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = k + 1$, así que, por el principio de inducción, lo es para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como la familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^m E_j$ es medible, así que:

$\mu_e(A) = \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^m E_j\right)\right) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^m E_j\right)^c\right)$

$= \sum_{j=1}^m \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^m E_j\right)^c\right)$

$\geq \sum_{j=1}^m \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right)^c\right)$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ y utilizando la σ-subaditividad de la medida exterior,se obtiene entonces:

$\mu_e(A) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right)^c\right)$

$\geq \mu_e \left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \right) + \mu_e \left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c \right)$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

∎

PASO 14.

Proposición 10. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu_F(E)$, es σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(E_j)$$

Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto medible su medida, se tiene, para cualquier $m \in \mathbb{N}$:

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \mu_F(\bigcup_{j=1}^{m} E_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F(E_j)$$

Así que tomando límite cuando $m \to \infty$, se tiene:

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(E_j)$$

Por lo tanto:

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(E_j)$$

∎

Los resultados anteriores pueden condensarse en el siguiente teorema:

Teorema 5. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distribución en n variables. Entonces existe una medida μ_F, definida sobre una $\sigma-$álgebra $\Im_F$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, la cual contiene a las celdas $R \in \mathcal{C}$ y, si $R = (a_1, b_1| \times \cdots \times (a_n, b_n|$ es cualquiera de esas celdas, entonces:*

$$\mu_F\left(R\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\left\{(x_1,\cdots,x_n) \in S^{(k)}_{(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)}\right\}} F\left(x_1, \cdots, x_n\right)$$

Obsérvese que μ_X es una medida de probabilidad, ya que $\mu_X\left(\mathbb{R}^n\right) = 1$.

Así que podemos concluir que **una función de distribución en n variables F representa una medida de probabilidad $\boldsymbol{\mu_F}$, definida sobre una $\boldsymbol{\sigma}-$álgebra $\Im_{\mathbf{F}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, la cual contiene a las celdas $\mathbf{R} \in \mathcal{C}$. Además, si F es la función de distribución conjunta de n variables aleatorias, $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_n}$, y $\mathbf{R} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}] \times \cdots \times (\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}]$, entonces:**

$$\mathbf{P}\left([\mathbf{a_1} < \mathbf{X_1} \leq \mathbf{b_1}, \cdots, \mathbf{a_n} < \mathbf{X_n} \leq \mathbf{b_n}]\right) = \boldsymbol{\mu_F}\left(\mathbf{R}\right)$$

Más aún, para cualquier $\mathbf{B} \in \Im_{\mathbf{F}}$, se tiene:

$$\mathbf{P}\left[(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_n}) \in \mathbf{B}\right] = \boldsymbol{\mu_F}\left(\mathbf{B}\right)$$

Obsérvese que, al ser $\Im_F$ una $\sigma-$álgebra que contiene a las celdas en $\mathcal{C}$, se deduce que $\Im_F$ contiene a todas las celdas en $\mathbb{R}^n$, del tipo que sean, ya que, utilizando las operación de unión numerable, intersección numerable y complemento, cualquier celda en $\mathbb{R}^n$ se puede obtener a partir de celdas en $\mathcal{C}$.